数理解析研究所講究録
951巻 1996年 117-119

CURVATURE EVOLUTION OF PLANE CURVES WITH PRESCRIBED OPENING ANGLES

石村 直之 (ISHIMURA, NAOYUKI)

東京大学大学院数理科学研究科

1。 k.Ecker and G.Huisken は、$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ 全体で graph としてあらわされる曲面の平均曲率流を考察した。(Ann. of Math. 130(1989), Invent. Math. 105(1991)) 初期値問題の可解性、長時間後の振る舞い等を示した。特に、初期値がある増大条件をみたせば、時間無限大のとき拡大自己相似解に収束することを証明した。さらにこの拡大自己相似解の分類問題を提出したが、これは現在でも未解決である。

ここでは、一方、一次元全体上において曲線の曲率流を考察する。すなわち

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2}, \quad u > 0, \quad \text{in } -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u_x \to -K_2 \text{ as } x \to -\infty, \text{ and } u_x \to K_1 \text{ as } x \to \infty, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{3 ,}$$

ここで $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ は任意に指定された定数、$u_0(x)$ は凸で (2) およびある $C > 0,\ 0 < \delta \leq 1$ に対し

$$(u_0 - xu_{0x})^2 \leq C(1+x^2)^{1-\delta} \tag{4}$$

をみたすとする。(4) は凸性より導かれないことに注意。条件 (4) は本質的に K.Ecker and G.Huisken の増大条件と同じである。そのため解の存在、時間無限大での拡大自己相似解への収束などは同様に示される。この研究の新しいところは、この拡大自己相似解の分類にある。

まず $\tau=\frac{1}{2}\log(1+t)$ として

$$u(t,x)=\sqrt{2(1+t)}\cdot U(\tau,y),\quad y=\frac{x}{\sqrt{2(1+t)}}$$

とおくと、(1) は

$$U_\tau=\frac{U_{yy}}{1+U_y^2}-U+yU_y \tag{5}$$

となる。(5) の定常解を拡大自己相似解という。

定理1． *(1)(2)(3) の解が $t>0$ で存在する。(4) のもとでは、$t\to\infty$ のとき (2) をみたす一意の (5) の定常解に収束する。*

２。拡大自己相似解の分類定理を述べておく。少し設定をかえて次の問題を考える。

$$\begin{cases}\dfrac{U_{yy}}{1+U_y^2}=U-yU_y,\quad U>0 & \text{for } -\infty<y<\infty,\\ U(y)\to\infty & \text{as } |y|\to\infty.\end{cases} \tag{6}$$

定理2． *$0<K_1\le K_2<\infty$ を任意に与えられた定数とする。(6) の一意解で、それは必然的に凸になるが、次をみたすものが存在する。*

$$U(y)=-K_2y+o(1/|y|)\quad \text{as } y\to-\infty$$
$$U(y)=K_1y+o(1/|y|)\quad \text{as } y\to\infty.$$

詳しい証明は N.Ishimura, Bull. Austral. Math. Soc. 52 (1995) を見られたい。ここでは一意性を示す方針のみ述べる。(6) の解は実は極座標表示できる。今これを認めて

$$(U(\theta),y(\theta))=(R(\theta)\sin\theta,R(\theta)\cos\theta),$$

ただし $R^2=U^2+y^2$ for $\theta_1<\theta<\theta_2$, $\theta_i\in(0,\pi)$ $(i=1,2)$ は $\theta_1=\arctan K_2$, $\theta_2=-\arctan K_1$ で決める、とおく。すると (6) は

$$(7)\qquad \begin{cases} 1 = \dfrac{(RR_{\theta\theta} - 2R_\theta^2 - R^2)}{(R^2 + R_\theta^2)^2} & \text{for } \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ R \to \infty & \text{as } \theta \to \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

と変換される。大事な点は、(7) の方程式は $\theta \mapsto \theta + \alpha$ の平行移動により不変なことである。すなわち結局、次の命題を導けばよいことになる。

命題３．*(6)* の対称な凸解 $U(y; U_0)$ の *1-parameter family* が存在する。対称とは $U_y(0) = 0$, $U(0) = U_0 > 0$ を意味する。

$\alpha(U_0) := \lim_{y\to\infty} U_y(y; U_0)$ は *well-defined*、しかも $u_0 \mapsto \alpha(U_0)$ は狭義単調増大で $\mathbf{R}^+ = \{x > 0\}$ からそれ自身への同相写像を与える。